0-755278

На правах рукописи

Винокур Марина Владимировна

УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

ЕКАТЕРИНБУРГ – 2006

Работа выполнена в Челябинском государственном университете на кафедре математического анализа

Научный руководитель	кандидат физико-математических наук, доцент В.И. Ушаков
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, профессор Ф.Х. Мукминов доктор физико-математических наук, профессор Л.Д. Менихес
Ведущая организация	Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Защита состоится "15" марта 2006 года в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Уральском государственном университете им. А.М. Горького по адресу:

620083, Екатеринбург, просп. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

Автореферат разослан "13" февраля 2006г.

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КГУ
0000234169

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических
наук, профессор В.Г. Пименов

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА
им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАЗАНСКОГО ГОС. УНИВЕРСИТЕТА

0-755278

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию однозначной разрешимости и поведения решений второй начально-краевой задачи для одного класса нестационарных уравнений соболевского типа

$$Lu_t = b(x,t)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \qquad (0.1)$$

где $Lu = \operatorname{div}(k(x,t)\nabla_x u) - c(x,t)u$, в нецилиндрических областях, изменяющихся с возрастанием времени (т.е. проекция сечения области Q плоскостью $\{t = \tau\}$ на плоскость $\{t = 0\}$ зависит от τ).

Исследование подобных уравнений в первую очередь связано с исследованием задач гидромеханики, физики плазмы, физики атмосферы [1]. Начально-краевые задачи для уравнения вида (0.1) в изменяющихся со временем областях используются при постановке некоторых задач гидромеханики [2], теории тепломассопереноса [3] и др.

Данное исследование находится на стыке сравнительно нового научного направления теории неклассических задач математической физики — уравнений соболевского типа (уравнений, невырожденных относительно производной по времени) и теории начально-краевых задач для различного типа уравнений и систем уравнений в нецилиндриче-

[1] Маслов В.П.,Мосолов П.П. Уравнения одномерного баротропного газа.-М.:Наука.-1990.-216с.

[2] Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод.- М.: Наука.- 1997.- 457 с.

[3] Маслов В.П., Данилин В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. Эволюция диссипативных структур.- М.: Наука.- 1987.- 352 с.

ских областях.

Многообразие аспектов, в которых рассматриваются задачи Коши для линейных уравнений соболевского типа, можно представить сославшись на работы Г.В. Демиденко, С.В. Успенского, A. Favini, A. Yagi, И.В. Мельниковой, А.И. Кожанова, В.Н. Врагова, Г.А. Свиридюка, В.Е. Федорова и многих других. В указанных работах (x, t) из цилиндрической области $Q_T = \Omega_0 \times [0, T]$.

Нецилиндрические области широко применяются при постановке начально-краевых задач для различного типа уравнений и систем уравнений в теории теплопроводности [4], разработке тепловой защиты космических аппаратов [5], экологии и медицины [6] и других. Исследованию такого рода задач и разработке общих принципов их изучения посвящены работы М. Жевре, И.Г. Петровского, J.L. Lions, С.Г. Крейна, Л.И. Камынина, В.П. Михайлова, G. Da Prato, J. Ferreira, Н.А. Ларькина и многих других.

Исследование уравнений соболевского типа в изменяющихся со временем областях в настоящее время остается мало изученной темой,

[4] Карташов Э.М., Партон В.З. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара // Итоги науки и техники, сер. Мех-ка деформ. тв. тела.-М.:ВИНИТИ.-1991.-Т.22.-С.55-127.

[5] Малов Ю.И., Мартинсон Л.К. Разогрев оболочки при наличии термического разрушения нагреваемой поверхности // Изв. Вузов, сер. Машиностр-е,- 1989.- №1.- С.52-56.

[6] Митропольский Ю.А., Березовский А.А., Плотницкий Т.А. Задачи со свободными границами для нелинейного эволюционного уравнения в проблемах металлургии, медицины, экологии // Укр. мат. журнал.- 1992.- Т.44, №1.- С.67-75.

которая представляется актуальной.

Методы исследования. В диссертации использовались методы теории функций и функционального анализа, методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, теория пространств С.Л. Соболева.

Научная новизна. В диссертации получены следующие результаты:

- предложен подход к исследованию линейных начально-краевых задач в областях с изменяющейся в зависимости от временим границей без замены переменных;
- доказаны теоремы существования и единственности для данного типа задач;
- исследовано поведение решений данного типа задач при больших значениях времени в регулярных областях;
- установлены теоремы об однозначной разрешимости и поведении решений пары сопряженных задач в случае неограниченных коэффициентов уравнения.

Все результаты являются новыми.

Практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях начально-краевых задач для уравнений соболевского типа в нецилиндрических областях.

Аппробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на международной научной конференции "Спектральная теория дифференциальных операторов и смежные вопросы" в г. Стерлитамаке (1998 г.), на зимней и весенней Воронежских математических школах (1999 г.), на международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения" в г. Челябинске (1999 г.), на международной научной конференции "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения" в г. Уфа (2000 г.), на Четвертом сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике, посвященном памяти М.А.Лаврентьева в г. Новосибирске (2000 г.), на городских семинарах по уравнениям соболевского типа (под руководством проф. Г.А. Свиридюка) и по асимптотическим методам (под руководством акад. РАН А.М. Ильина) в г. Челябинске. Кроме того, данное исследование поддержано грантами РФФИ 97-01-00444, Минобразования 1998-2000 г.г. и стипендией Законодательного собрания Челябинской области (2000).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 14 работ. Список работ приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Работа содержит 112 страниц, включая библиографический список из 93 наименований.

Содержание работы. **Во введении** приводится постановка задачи, обоснование ее актуальности, сделан краткий обзор опубликованных работ, имеющих отношение к теме диссертации и сравнение полученных в диссертации результатов с известными. Здесь же излагается краткое содержание диссертации.

В первой главе рассматривается вопрос существования и единственности второй краевой задачи:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k(x,t)\nabla u_t(x,t)) - c(x,t)u_t(x,t) &= b(x,t)u(x,t) + f(x,t) && (1.2) \\ u(x;0) &= \varphi(x) && (1.3) \\ \left.\frac{\partial u_t}{\partial n}\right|_\Gamma &= 0, && (1.4) \end{aligned}$$

в сужающейся по времени области Q_T. Рассматриваемые в работе нецилиндрические области подразделяются на два вида: сужающиеся по времени $(\forall t_1, t_2 : 0 \le t_1 \le t_2 \le T, \Omega_{t_2} \subseteq \Omega_{t_1})$ и расширяющиеся по времени $(\forall t_1, t_2 : 0 \le t_1 \le t_2 \le T, \Omega_{t_2} \supseteq \Omega_{t_1})$.

$b(x,t), c(x,t), k(x,t)$ — положительные измеримые в Q_T функции.

$\varphi(x) \in L_2(\Omega_0)$, $f(x;t) \in L_2(Q_T)$.

$\Gamma = \{(x,t) | x \in \partial Q,\ t \in (0;T)\}$ — боковая поверхность Q_T,

n — внешняя нормаль к Γ по пространственным переменным.

$\Gamma = \{(x, \psi(x)) |\quad x \in \Omega_0,\quad \psi(x) : \mathbb{R}^n -> \mathbb{R}\}$, где функция $\psi(x)$ есть точная верхняя грань множества таких t, что отрезок с концами в точках $(x, 0)$ и (x, t) лежит в Q_T.

Определение 1.4.1 Обобщенным решением данной задачи в Q_T считается функция $u(x,t)$ — элемент пространства $W_2^{0,1}(Q_T)$, для которой $u_t(x,t)$ из $W_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$- \int\limits_{Q_T} k(x) \nabla u_t(x,t) \nabla v(x,t) dx dt - \int\limits_{Q_T} c(x) v(x,t) u_t(x,t) dx dt =$$
$$\int\limits_{Q_T} b(x) v(x,t) u(x,t) dx dt + \int\limits_{Q_T} f(x,t) v(x,t) dx dt \qquad (1.5)$$

для любой пробной функции $v(x,t)$ из $W_2^{1,0}(Q_T)$ и начальному условию (1.3).

Теорема 1.5.1 *Пусть Q_T — сужающаяся по времени область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ ($mes\, \Omega_0 < \infty$). Функции $b(x,t), c(x,t), k(x,t)$ — ограничены, положительны, отделены от нуля и невозрастают по времени в Q_T. Существуют обобщеные производные $b_t(x,t), c_t(x,t), k_t(x,t)$. Функции $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $\varphi(x) \in L_2(\Omega_0)$. Тогда обобщенное решение решение задачи* (1.2)-(1.4) существует.

При данных условиях была доказана также единственность решения данной задачи.

Во второй главе диссертации исследована вторая краевая задача для уравнения:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(k(x,t)\nabla u_t(x,t)) &= b(x,t)u(x,t) + f(x,t) &\quad (2.1)\\
\nabla u(x,t)\Big|_{t=0} &= \nabla\varphi(x), \qquad x \in \Omega_0 &\quad (2.2)\\
\frac{\partial u_t(x,t)}{\partial n}\Big|_{\Gamma} &= 0, \qquad t > 0. &\quad (2.3)
\end{aligned}$$

В данной главе в качестве области определения решения поставленной задачи берется нецилиндрическая область, сужающаяся по времени. В качестве основных функциональных пространств рассматриваются:

$W = W_2^{1,0}(Q_T)$ — пространство функций, элементами которого являются функции $u(x,t)$ из $L_2(Q_T)$ такие, что $\nabla u(x,t)$ из $L_2(Q_T)$.

$V = V(Q_T)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих $\nabla u(0,x) = 0$, $x \in \Omega_0$.

$H = H(Q_T)$ — пополнение V в норме, порожденной скалярным произведением $(u,v)_H = \int\limits_{Q_T} (uv + \nabla u_t \nabla v_t) dx dt$.

Целью главы является доказательство существования и единственности обобщенных решений поставленной и сопряженной к ней задач.

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(k(x,t)\nabla v(x,t))_t &= b(x,t)v(x,t) + f(x,t), &\quad (2.8)\\
\frac{\partial v(x,t)}{\partial n}\Big|_{\Gamma} &= 0, \quad t > 0 &\quad (2.9)\\
\nabla v(x,\psi(x)) &= 0, &\quad (2.10)
\end{aligned}$$

где $f \in H^*$. При этом областью определения решения сопряженной задачи является область, расширяющаяся по времени.

Билинейная форма на $H \times W$ определена равенством:

$$B(u,v) =< k(x,t)\nabla u_t, \nabla v > + < b(x,t)u, v > .$$

$B(u,v)$ порождает пару взаимно сопряженных ограниченных операторов:

$$L : H \to W^*, \quad L^* : W^* \to H.$$

Определение 2.3.2 Обобщенным решением задачи (2.1)-(2.3) в Q_T будем называть функцию $u(x,t)$, такую, что при $T > 0$ функция $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - \varphi(x)$ принадлежит пространству $H(Q_T)$ и удовлетворяет уравнению $L\tilde{u} = \tilde{f}(x,t)$, где $\tilde{f}(x,t) = f(x,t) + b(x,t)\varphi(x)$.

Определение 2.3.3 Обобщенным решением задачи (2.8)-(2.10) в Q_T будем называть функцию $v(x,t)$, из пространства $W(Q_T)$, которая удовлетворяет уравнению $L^*v = f(x,t) + b(x,t)\varphi(x)$.

Следующая теорема, по существу, гарантирует однозначную разрешимость задач (2.1)-(2.3) и (2.8)-(2.10).

Теорема 2.4.1 *Пусть Q_T — сужающаяся по времени область, функции $b(x,t), k(x,t)$ ограничены, положительны и отделены от нуля в Q_T, тогда операторы $L : H \to W^*$ и $L^* : W^* \to H$ биективны.*

Следующим результатом второй главы является теорема характеризующая поведение решения поставленной задачи при $k(x,t) \equiv 1$, $b(x,t) \equiv 1$ в случае, когда область достаточно регулярна.

Определение 2.6.2 Область Q_T называется достаточно регулярной, если для каждого сечения Ω_t справедливо неравенство Пуанкаре: для всех $w(x,t) \in W_2^1(\Omega_t)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_{\Omega_t} w(x,t)dx = 0$, справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega_t} w^2(x,t)dx \le \beta(t) \int\limits_{\Omega_t} |\nabla w(x)|^2 dx.$$

Теорема 2.6.2 *Пусть для сечений Ω_t области Q_T справедливо неравенство Пуанкаре, $u(x,t)$ — решение задачи* (2.1)-(2.3) *с коэффициентами $k(x,t) \equiv 1$, $b(x,t) \equiv 1$, $mes\ \Omega_t < \infty$. Тогда для п.в. $t > 0$ справедливы неравенства*

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega_t} u^2(x,t)dx &\le \frac{1}{2t} \int\limits_{\Omega_0} |\nabla\varphi|^2 dx, \\
\int\limits_{\Omega_t} u^2(x,t)dx &\le \beta(t) \int\limits_{\Omega_0} |\nabla\varphi|^2 dx
\end{aligned}$$

В третьей главе диссертации рассматривается вторая краевая задача для уравнения соболевского типа:

$$-\Delta u_t(x,t) + b(t)u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q \tag{3.1}$$

$$\nabla u \Big|_{t=0} = \nabla\varphi(x), \quad x \in \Omega_0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0, \tag{3.3}$$

$b(t)$ — не является ограниченной, область Q_T — сужается по времени.

Введены определения обобщенных решений с помощью соответствующей билинейной формы. Аналогично второй главе доказана теорема существования и единственности поставленной и сопряженной к ней задач. Следущим результатом диссертации является теорема, содержащая оценки поведения решения:

Теорема 3.6.1 *Пусть для сечений Ω_t области Q_T справедливо неравенство Пуанкаре, $\nabla\varphi \in L_2(\Omega_0)$, $\varphi \in L_2(\Omega_0)$, $mes\, \Omega_0 < \infty$ и для всех $T > 0$*

$$\int_0^T \frac{dt}{b(t)} < +\infty,$$
$$\int_0^T b(t)dt < +\infty,$$

тогда задача (3.1)-(3.3) *имеет единственное решение и для почти всех $t > 0$ справедливы неравенства:*

$$\int_{\Omega_t} u^2(x,t)dx \leq \frac{1}{2tb(t)} \int_{\Omega_0} |\nabla\varphi(x)|^2 dx,$$
$$\int_{\Omega_t} u^2(x,t)dx \leq \beta(t) \int_{\Omega_0} |\nabla\varphi(x)|^2 dx.$$

В качестве примера рассматривается область вращения $Q = \{(x,t) : |x| < R(t)\}$, где $R(t)$—положительная убывающая функция.

Результаты диссертации опубликованы в [1]-[14].

Список опубликованных работ

[1] Иванова М.В. Вторая краевая задача для псевдопараболического уравнения в нецилиндрической области // Сб. тр. междунар. науч. конф. "Спектр. теория диф. операторов и смеж. воп-сы". Стерлитамак. 1998. Ч.1, с.46-47.

[2] Ушаков В.И., Иванова М.В. Вторая краевая задача для уравнения типа Соболева в нецилиндрической области. Вырожденный случай // Тез. докл. воронежской зимн. мат. шк. Воронеж, Изд-во ВГУ. – 1999. – с.209.

[3] Иванова М.В. Вторая краевая задача для уравнения типа Соболева в нецилиндрической области // Тез. докл. воронежской весен. мат. шк. "Понтр. чтения - X". Воронеж, Изд-во ВГУ. – 1999. – с.114.

[4] Иванова М.В. Вторая краевая задача для уравнения типа Соболева в нецилиндрической области. Случай расширяющихся областей // Тез. докл. междунар. науч. конф. "Диф. и интегр. ур-я". Челябинск, Изд-во ЧелГу. – 1999. – с.52.

[5] Ушаков В.И., Иванова М.В. Поведение решений уравнения соболевского типа в сужающейся области вращения // Тез. докл. меж-

дунар. науч. конф. "Компл. анализ и диф. ур-я". Уфа, Изд-во ИМ с ВЦ УНЦ РАН. – 2000. – Ч.3, с.164-165.

[6] Иванова М.В. О гладкости решений второй краевой задачи для уравнения соболевского типа в нецилиндрической области // Тез. докл. IV сиб. конгр. по прикл. и индустр. матем., посв. памяти М.А.Лаврентьева. Новосибирск, Изд-во Ин-та математики. – 2000. – Ч.1, с.58.

[7] Ushakov V.I., Ivanova M.V. The solution behaviour for Sobolev type equation in noncylindrical narrowing domains when $t \to \infty$ // Тез. докл. междунар. науч. конф. MOGRAN 2000. (Совр. групп. анализ для нов. тысячелетия.) Уфа, Изд-во УГАТУ. – 2000. – с.69.

[8] Ушаков В.И., Иванова М.В. Свойства функции Грина третьей смешанной задачи для параболического уравнения в нецилиндрической области // Известия ВУЗов. сер. Математика. – 2000. – N 10(461). – с.68-78.

[9] Иванова М.В. Об одной паре взаимосопряженных задач для уравнения соболевского типа в нецилиндрических областях // Тез. докл. междунар. науч. конф. "Дифф. и интегр. ур-я". Одесса, Изд-во Астропринт. – 2000. – с.113-114.

[10] Ушаков В.И., Иванова М.В. Поведение при больших значениях времени решений второй краевой задачи для псевдопараболического уравнения в сужающейся области // Вестник Челяб. ун-та. Математика. Механика. – 2001. – N 1(3).– с.126-134.

[11] Иванова М.В., Ушаков В.И. Поведение решений краевой задачи для псевдопараболического уравнения в нецилиндрической области // Сб. науч. работ "Уравнения соболевского типа". Челябинск, Челяб. гос. ун-т. – 2002. – с.30-38.

[12] Иванова М.В., Ушаков В.И. Вторая краевая задача для псевдопараболического уравнения в нецилиндрической области // Математические заметки. – 2002. – Т 72. — N 1. – с.43-47.

[13] Vinokur M.V. The Behavior of Boundary-Value Problem Solution for Pseudoparabolic Equation in Noncilindrical Domains. The Regular Enough Domains Case // Тез. докл. воронежской весен. мат. шк. "Понтр. чтения - XVI". Воронеж, Изд-во ВГУ. – 2005. с. 10-11.

[14] Винокур М.В. Разрешимость и поведение решения начально-краевой задачи для уравнения соболевского типа в нецилиндрической области в случае неограниченных коэффициентов // Деп. ВИНИТИ № 552-В2005 от 20.04.2005 - 26 с.

z